

ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 1 (2_485)

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

(Μονάδες 8)

iii. Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε,

$$\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda \cdot x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R} : (1)$$

ii. Για να έχει η εξίσωση (1) ακριβώς μία λύση πρέπει και αρκεί:

$$\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$$

Για την μοναδική λύση, έχουμε:

$$\frac{(\lambda - 1)x}{\lambda - 1} = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda - 1} \Leftrightarrow x = \lambda + 1.$$

iii. Για να είναι η εξίσωση (1) ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών πρέπει να έχει την μορφή $0 \cdot x = 0$, άρα :

$$\begin{cases} \lambda - 1 = 0 \\ \text{και} \\ (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{και} \\ \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (2_1055)

Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Για $\lambda = 1$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται,

$$(1^2 - 1)x = (1 + 1)(1 + 2) \Leftrightarrow 0x = 6, \text{ η οποία είναι αδύνατη.}$$

Για $\lambda = -1$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται,

$$\left[(-1)^2 - 1\right]x = (-1+1)(-1+2) \Leftrightarrow (1-1)x = (-1+1)(-1+2) \Leftrightarrow 0x = 0$$

η οποία είναι αόριστη ή ταυτότητα.

β) Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν

$$\lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \neq 1, \text{ από όπου προκύπτει ισοδύναμα ότι } \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda \neq -1.$$

Συνεπώς για $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{\lambda^2-1} = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{(\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{\lambda+2}{\lambda-1}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (2_3382)

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α. Να δείξετε ότι $A = 4$

Μονάδες 12

β. Να λύσετε την εξίσωση $|x+A|=1$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3}) + \sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \\ &= \frac{\sqrt{15} + 3 + 5 - \sqrt{15}}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{8}{5-3} = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

β. Έχουμε

$$|x+A|=1 \Leftrightarrow |x+4|=1 \Leftrightarrow x+4=1 \text{ ή } x+4=-1 \Leftrightarrow x=-3 \text{ ή } x=-5$$

ΑΣΚΗΣΗ 4 (2_4302)

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha=1$.

(Μονάδες 5)

ii) όταν $\alpha=-3$.

(Μονάδες 8)

- β. Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε την λύση αυτή.

(Μονάδες 12)

ΛΥΣΗ

- α. Η εξίσωση $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$ (1) είναι πρώτου βαθμού ως προς x , ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

- i) Για $\alpha = 1$ η εξίσωση (1) γίνεται $4x = -8 \Leftrightarrow x = -2$.

Δηλαδή, για $\alpha = 1$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση, την $x = -2$.

- ii) Για $\alpha = -3$ η εξίσωση (1) γίνεται $0x = 0$, οπότε έχει ως λύση κάθε πραγματικό αριθμό, άρα είναι ταυτότητα.

- β. Η δοθείσα εξίσωση (1), είναι της μορφής $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta$. Οπότε η (1) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\alpha + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -3$.

Για $\alpha \neq -3$, έχουμε $(\alpha + 3)x = (\alpha - 3)(\alpha + 3) \Leftrightarrow x = \frac{(\alpha - 3)(\alpha + 3)}{\alpha + 3} \Leftrightarrow x = \alpha - 3$,

μοναδική λύση.

ΑΣΚΗΣΗ 5 (4_2084)

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

Μονάδες 6

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

Μονάδες 12

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς x δίνεται από τον τύπο

$$E = x^2$$

Συνεπώς, κάθε πλακάκι τύπου Α θα καλύπτει εμβαδόν

$$E_1 = d^2 \text{ ή } E_1(d) = d^2 \text{ με } d > 0,$$

Κάθε πλακάκι τύπου Β θα καλύπτει εμβαδόν

$$E_2 = (d+1)^2 \text{ ή } E_2(d) = (d+1)^2 \text{ με } d > 0,$$

β) (i) Αν E η συνολική επιφάνεια τότε $E = 200E_1$ ή $E = 128E_2$, δηλαδή

$$\begin{aligned} 200E_1(d) &= 128E_2(d) \Leftrightarrow 200d^2 = 128(d+1)^2 \stackrel{+8}{\Leftrightarrow} 25d^2 = 16(d+1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |5d| = |4(d+1)| \stackrel{d>0}{\Leftrightarrow}_{d+1>0} 5d = 4(d+1) \Leftrightarrow 5d = 4d + 4 \Leftrightarrow d = 4 \end{aligned}$$

Άρα, το πλακάκι τύπου Α έχει πλευρά 4 cm και το πλακάκι τύπου Β έχει πλευρά $4+1=5$ cm.

(ii) Το πλακάκι τύπου Α θα καλύπτει επιφάνεια

$$E_1(4) = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$$

Άρα, η συνολική επιφάνεια θα είναι

$$E = 200 \cdot 16 = 3200 \text{ cm}^2.$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_481)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

ii. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 8)

iii. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε,

$$\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 4(\lambda - 2)^2$$

ii. Επειδή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $\Delta = 4(\lambda - 2)^2 \geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς.

iii. Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \\ P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2\lambda \\ x_1 x_2 = 4\lambda - 4 \end{cases}$$

$$\text{Οπότε, } x_1 + x_2 = x_1 x_2 \Rightarrow 2\lambda = 4\lambda - 4 \Rightarrow \lambda = 2$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_483)

i. Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

(Μονάδες 12)

ii. Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε,

$$|2x - 1| = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \text{ ή } 2x - 1 = -3 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -1$$

ii. Από το (α) ερώτημα $\alpha < \beta$, άρα $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$ γίνεται $-x^2 + 2x + 3 = 0$ και έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16$$

και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2+4}{-2} = -1 \\ x_2 = \frac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_493)

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$

Μονάδες 10

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε :

$$|x - 2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = \sqrt{3} \\ \text{ή} \\ x - 2 = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ \text{ή} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{3} \\ \text{ή} \\ x_2 = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

β) Για να κατασκευάσουμε μια δευτεροβάθμια εξίσωση, ενώ γνωρίζουμε τις ρίζες της x_1, x_2 , βρίσκουμε, το άθροισμα τους :

$$S = x_1 + x_2 = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

και το γινόμενο τους :

$$P = x_1 \cdot x_2 = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$$

και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον τύπο: $x^2 - Sx + P = 0$ οπότε η ζητούμενη εξίσωση γίνεται :

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_496)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 + 5 = 0$.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda)^2 - 4 \cdot 4(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16$$

β) Από θεωρία γνωρίζουμε ότι :

$$\alpha^2 \geq 0 \text{ (κάθε αριθμός υψωμένος στο τετράγωνο είναι μη αρνητικός).}$$

$$\text{Βλέπουμε ότι : } \Delta = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 4(\lambda - 2)^2 \geq 0$$

Επομένως η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Από τους τύπους Vieta παίρνουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -2\lambda \text{ και } x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 4(\lambda - 1)$$

Επομένως

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (-2\lambda)^2 + 4(\lambda - 1) + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda - 4 + 5 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

-

ΑΣΚΗΣΗ (2_507)

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

Μονάδες 6

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Θέτω $\lambda = 1$ και έχω την εξίσωση: $(1^2 - 9)x = 1^2 - 3 \cdot 1$ δηλ.: $-8x = -2$

Θέτω $\lambda = 2$ και έχω την εξίσωση: $(2^2 - 9)x = 2^2 - 3 \cdot 2$ δηλ.: $-5x = -2$

Θέτω $\lambda = 3$ και έχω την εξίσωση: $(3^2 - 9)x = 3^2 - 3 \cdot 3$ δηλ.: $0 \cdot x = 0$

β) Η (1) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν ο συντελεστής του αγνώστου είναι διάφορος του μηδενός οπότε :

$$\lambda^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 3 \neq 0 \\ \text{και} \\ \lambda + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 3 \\ \text{και} \\ \lambda \neq -3 \end{cases}$$

γ) Η μοναδική λύση της (1), ισούται με 4, αν και μόνο αν ($\lambda \neq -3$ και $\lambda \neq 3$) από ερώτημα (β) και

$$(\lambda^2 - 9)4 = \lambda^2 - 3\lambda \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 36 = \lambda^2 - 3\lambda \Leftrightarrow 3\lambda^2 + 3\lambda - 36 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

Έχουμε:

$$\Delta = 49 \text{ και } \lambda = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = -4 \end{cases} \text{ και επειδή } \lambda \neq \pm 3 \text{ είναι } \lambda = -4$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_1005)

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{1+x}{x-1}$ και $B = \frac{2}{x^2-x}$ όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A και B πρέπει $x \neq 1$ και $x \neq 0$.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A = B$.

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α. Η παράσταση A ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία:

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Η παράσταση B ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία:

$$x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x \neq 1.$$

Οπότε για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A και B πρέπει $x \neq 1$ και $x \neq 0$.

β. Για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow \frac{1+x}{x-1} = \frac{2}{x^2-x} \Leftrightarrow \frac{1+x}{x-1} = \frac{2}{x(x-1)} \Leftrightarrow \frac{1+x}{1} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(1+x) = 2 \Leftrightarrow x + x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες:

$$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \\ \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 - 3}{2} = -2 \end{cases}$$

όπου δεχόμαστε μόνο την $x = -2$ λόγω των περιορισμών $x \neq 1$ και $x \neq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_1007)

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης:

$$-2x^2 + 10x = 12 \quad (1)$$

Μονάδες 15

β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε:

$$-2x^2 + 10x = 12 \Leftrightarrow -2x^2 + 10x - 12 = 0 \Leftrightarrow -2(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 > 0,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες:

$$x_{1,2} = \begin{cases} \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

β. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \neq 2$.

Τότε:

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0 &\Leftrightarrow -2x^2 + 10x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3 \text{ (από το α.ερώτημα)} \end{aligned}$$

όπου δεχόμαστε μόνο την $x = 3$ λόγω του περιορισμού $x \neq 2$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_1093)

Δίνονται οι αριθμοί : $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι :

i) $A + B = \frac{1}{2}$

Μονάδες 8

ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$

Μονάδες 8

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) i) Έχουμε,

$$\frac{1}{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot (5-\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5}) \cdot (5-\sqrt{5})} + \frac{1 \cdot (5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5}) \cdot (5+\sqrt{5})} = \frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{(5-\sqrt{5}) \cdot (5+\sqrt{5})} = \frac{10}{5^2 - \sqrt{5}^2}$$

$$= \frac{10}{25-5} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

ii) Έχουμε,

$$\frac{1}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot 1}{(5+\sqrt{5}) \cdot (5-\sqrt{5})} = \frac{1}{5^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{1}{25-5} = \frac{1}{20}$$

β) Ξέρουμε ότι η εξίσωση με ρίζες x_1 και x_2 είναι η $x^2 - Sx + P = 0$, όπου $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$ (τύποι Vieta).

Έχουμε

$$S = A + B = \frac{1}{2} \text{ και } P = A \cdot B = \frac{1}{20},$$

οπότε η εξίσωση είναι

$$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20} = 0 \Leftrightarrow 20x^2 - 10x + 1 = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_1275)

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1 και x_2

Μονάδες 6

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων : $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Μονάδες 9

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Για να έχει το τριώνυμο δύο άνισες πραγματικές ρίζες πρέπει η διακρίνουσα του να είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

Το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$ έχει συντελεστές $\alpha = 2$, $\beta = 5$ και $\gamma = -1$, οπότε έχουμε :

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 25 + 8 = 33 > 0$$

Άρα το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

β) Από τους τύπους Vieta έχουμε ότι :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{5}{2} \text{ και } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{1}{2}$$

Επίσης

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 5$$

γ) Ξέρουμε ότι η εξίσωση με ρίζες $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$ είναι η $x^2 - S'x + P' = 0$, όπου

$$S' = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5 \text{ και } P' = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.$$

Άρα η εξίσωση είναι : $x^2 - 5x - 2 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ (2_1298)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = -30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$

Μονάδες 15

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = -30 \Leftrightarrow \alpha \beta (\alpha + \beta) = -30 \Leftrightarrow \alpha \beta \cdot 2 = -30 \Leftrightarrow \frac{\alpha \beta \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = -\frac{30}{2} \Leftrightarrow \alpha \beta = -15$$

β) Για να βρούμε 2 αριθμούς των οποίων γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο, χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

$$x^2 - Sx + P = 0 \stackrel{S=\alpha+\beta=2}{\Leftrightarrow} \stackrel{P=\alpha\beta=-15}{x^2 - 2x - 15 = 0}$$

η οποία έχει

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 > 0,$$

οπότε έχει δύο ρίζες, τις

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = 5 \text{ και } x_2 = \frac{2 - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = -3$$

Επομένως,

$$\alpha = 5, \beta = -3 \quad \text{ή} \quad \alpha = -3, \beta = 5$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_1509)

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0, \quad \textcircled{1}$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ .

Μονάδες 13

β) Για $\lambda = 2$, να λύσετε την εξίσωση $\textcircled{1}$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός 1 είναι λύση της εξίσωσης, άρα θα την επαληθεύει, άρα

$$x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0 \xrightarrow{x=1} 1^2 - (\lambda - 1) \cdot 1 + 6 = 0 \Rightarrow 1 - \lambda + 1 + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 8}$$

β) Είναι:

$$x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0 \xrightarrow{\lambda=2} x^2 - (2 - 1)x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 6 = 0$$

Είναι:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 - 24 = -23 < 0$$

Οπότε η εξίσωση $\textcircled{1}$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΗ (2_1533)

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 , να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει:

$$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$$

Μονάδες 15

Λύση

α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + 2x + \lambda - 2$ είναι:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 2) = 4 - 4(\lambda - 2) = 4 - 4\lambda + 8 = 12 - 4\lambda.$$

Η εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες, όταν $\Delta \geq 0$.

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 12 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow -4\lambda \geq -12 \Leftrightarrow \lambda \leq 3$$

Άρα η εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες όταν $\lambda \in (-\infty, 3]$.

β) Από τους τύπους Vieta ισχύει ότι:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{1} = -2 \quad \text{και} \quad x_1 x_2 = \frac{\lambda - 2}{1} = \lambda - 2.$$

Όταν έχει δύο ρίζες (δηλ. όταν $\lambda \leq 3$) έχω:

$$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow \lambda - 2 - 2 \cdot (-2) = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 + 2 - 4 \Leftrightarrow \lambda = -1, \text{ δεκτή.}$$

Άρα η ζητούμενη τιμή του λ είναι -1 .

ΑΣΚΗΣΗ (2_3839)

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$

α. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2

Μονάδες 12

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α. Αφού η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 , τότε

$$\lambda(-2)^2 - (\lambda - 1)(-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 2(\lambda - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 2\lambda - 2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 6\lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

β. Για κάθε $\lambda \neq 0$ η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού, άρα θα πρέπει $\Delta \geq 0$.

Έχουμε

$$\Delta = [-(\lambda - 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot (-1) = (\lambda - 1)^2 + 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda = (\lambda + 1)^2 \geq 0,$$

για κάθε $\lambda \neq 0$

ΑΣΚΗΣΗ (2_3857)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha \cdot \beta = 4$ και $\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = 20$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.

Μονάδες 10

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε,

$$\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha \beta (\alpha + \beta) = 20$$

$$\text{όμως } \alpha \beta = 4 \text{ άρα } 4(\alpha + \beta) = 20 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$$

β. Το άθροισμα S και το γινόμενο P των α και β είναι

$$S = \alpha + \beta = 5 \text{ και } P = \alpha \beta = 4$$

$$\text{Άρα οι } \alpha, \beta \text{ είναι λύσεις της εξίσωσης } x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

Έχουμε

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0 ,$$

$$\text{άρα } x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \text{ οπότε } x_1 = 4 \text{ και } x_2 = 1$$

Συνεπώς $\alpha = 4$, $\beta = 1$ ή $\alpha = 1$, $\beta = 4$

ΑΣΚΗΣΗ (2_3863)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = -1 \text{ και } \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$

Μονάδες 10

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε

$$\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = -12 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta)^2 = -12$$

$$\text{όμως } \alpha + \beta = -1 , \text{ άρα } \alpha\beta(-1)^2 = -12 \Leftrightarrow \alpha\beta = -12$$

β. Οι α , β έχουν άθροισμα $S = \alpha + \beta = -1$ και γινόμενο $P = \alpha\beta = -12$.

Άρα οι α, β είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι,

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49 > 0$$

και οι ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \text{ άρα } x_1 = 3 , x_2 = -4$$

Άρα $\alpha = 3$, $\beta = -4$ ή $\alpha = -4$, $\beta = 3$

ΑΣΚΗΣΗ (2_4308)

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 10)

β. Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0$$

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

α) Για να έχει νόημα η παράσταση Π πρέπει οι παρονομαστές να είναι αριθμοί διαφορετικοί από το μηδέν. Πρέπει:

$$\begin{cases} x^2 - x \neq 0 \\ 1 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

β) Για $x \neq 0$ και $x \neq 1$ η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 1}{x(x-1)} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x(x-1) \frac{2x^2 - 1}{x(x-1)} - x(x-1) \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού με διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow \Delta = 9$$

άρα η εξίσωση έχει 2 ρίζες τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{4} \Leftrightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1-3}{4} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Όμως είναι $x \neq 1$ άρα η λύση της εξίσωσης είναι μόνο η $x = -\frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ (2_4309)

Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20\text{cm}$ και εμβαδό $E = 24\text{cm}^2$.

α. Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου.

(Μονάδες 15)

β. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Έστω x_1, x_2 οι διαστάσεις του ορθογωνίου τότε η περίμετρός του θα είναι

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) \text{ και το εμβαδό του } E = x_1 \cdot x_2$$

Αν θεωρήσουμε $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$ τότε έχουμε

$$\begin{cases} \Pi = 2S \\ E = P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2S = 20 \\ P = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 10 \\ P = 24 \end{cases}$$

Η ζητούμενη εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι η: $x^2 - 10x + 24 = 0$

β) Για να βρούμε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $x^2 - 10x + 24 = 0$ η οποία έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 100 - 96 \Leftrightarrow \Delta = 4$$

άρα έχει 2 λύσεις τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10+2}{2} \Leftrightarrow x_1 = 6 \\ x_2 = \frac{10-2}{2} \Leftrightarrow x_2 = 4 \end{cases}$$

Άρα τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι 6cm και 4cm

ΑΣΚΗΣΗ (2_4310)

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β , τέτοιοι ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 = 272$$

α. Με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

να δείξετε ότι: $\alpha\beta = -64$

(Μονάδες 8)

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β

(Μονάδες 10)

γ. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Χρησιμοποιώντας τη δοσμένη ταυτότητα έχουμε:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow 12^2 = 272 + 2\alpha\beta \Leftrightarrow 2\alpha\beta = 144 - 272 \Leftrightarrow \\ 2\alpha\beta = -128 \Leftrightarrow \alpha\beta = -64$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α και β θα έχει άθροισμα ριζών $S = \alpha + \beta = 12$ και γινόμενο $P = \alpha\beta = -64$ άρα θα είναι η:

$$x^2 - 12x - 64 = 0$$

γ) Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $x^2 - 12x - 64 = 0$ που έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64) = 144 + 256 \Leftrightarrow \Delta = 400$$

άρα έχει 2 ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{12 \pm 20}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{12+20}{2} \Leftrightarrow x_1 = 16 \\ x_2 = \frac{12-20}{2} \Leftrightarrow x_2 = -4 \end{cases}$$

Άρα οι αριθμοί α, β είναι οι 16 και -4

ΑΣΚΗΣΗ (2_4313)

Δίνονται οι αριθμοί $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}$ και $B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$

α. Να δείξετε ότι $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$

(Μονάδες 12)

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B .

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή κάθε κλάσματος με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή και έχουμε:

$$A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}} = \frac{3 + \sqrt{7}}{(3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7})} = \frac{3 + \sqrt{7}}{3^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{3 + \sqrt{7}}{9 - 7} = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$$

$$B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}} = \frac{3 - \sqrt{7}}{(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})} = \frac{3 - \sqrt{7}}{3^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{3 - \sqrt{7}}{9 - 7} = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$$

Άρα είναι:

$$A + B = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} + \frac{3 - \sqrt{7}}{2} = \frac{3 + \sqrt{7} + 3 - \sqrt{7}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$A \cdot B = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{7}}{2} = \frac{(3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7})}{4} = \frac{3^2 - \sqrt{7}^2}{4} = \frac{9 - 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα A, B

Θα έχει άθροισμα ριζών $S = A + B = 3$ και γινόμενο ριζών $P = A \cdot B = \frac{1}{2}$,

άρα θα είναι η:

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ (2_4317)

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 12)

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε

$$x_1 \cdot x_2 = -3$$

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού αφού $\lambda \neq -2$ με διακρίνουσα:

$$\begin{aligned}\Delta &= (2\lambda)^2 - 4(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 2) \\ &= 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 8\lambda + 8 = 8 - 4\lambda\end{aligned}$$

Για να έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \text{και} \\ \lambda \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 4\lambda > 0 \\ \text{και} \\ \lambda \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 2 \\ \text{και} \\ \lambda \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$$

β) Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης είναι $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 2}$, άρα:

$$P = x_1 x_2 = -3 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 1}{\lambda + 2} = -3 \Leftrightarrow \lambda - 1 = -3\lambda - 6 \Leftrightarrow 4\lambda = -5 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{4}$$

λύση η οποία είναι δεκτή αφού ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -2) \cup (-2, 2)$

ΑΣΚΗΣΗ (4_1890)

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = 12\lambda + 25$

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$.

(Μονάδες 4)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση: $(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0$ (2)

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Η εξίσωση (1) είναι στη μορφή $ax^2 + bx + \gamma = 0$, με $a = \lambda + 2 \neq 0$, $\beta = 2\lambda + 3$ και $\gamma = \lambda - 2$.

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι:

$$\begin{aligned} \Delta &= (2\lambda + 3)^2 - 4 \cdot (\lambda + 2) \cdot (\lambda - 2) = (2\lambda)^2 + 2 \cdot 2\lambda \cdot 3 + 3^2 - 4(\lambda^2 - 4) \\ &= 4\lambda^2 + 12\lambda + 9 - 4\lambda^2 + 16 = 12\lambda + 25 \end{aligned}$$

β) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες όταν η διακρίνουσά της είναι θετική, δηλαδή:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 12\lambda + 25 > 0 \Leftrightarrow 12\lambda > -25 \Leftrightarrow \lambda > \frac{-25}{12}.$$

Επιπλέον όμως από την αρχική υπόθεση είναι $\lambda \neq -2$, οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για $\lambda \in \left(\frac{-25}{12}, -2\right) \cup (-2, +\infty)$.

γ) Από τους τύπους Vieta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} \text{ και } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda-2}{\lambda+2}, \text{ με } \lambda \neq -2$$

δ) Έστω ότι υπάρχει $\lambda \neq -2$ τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση (2). Τότε, χρησιμοποιώντας και τις εκφράσεις των $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$ από το τρίτο ερώτημα, έχουμε:

$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\lambda-2}{\lambda+2} + 3\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} - 1 = 0 \text{ και } \frac{\lambda-2}{\lambda+2} + 3 = 0$$

τότε,

$$\frac{\lambda-2}{\lambda+2} + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda-2}{\lambda+2} = -3 \Leftrightarrow \lambda - 2 = -3(\lambda + 2) \Leftrightarrow \lambda - 2 = -3\lambda - 6 \Leftrightarrow 4\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

και

$$-\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} - 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{2\lambda+3}{\lambda+2} = 1 \Leftrightarrow -(2\lambda+3) = \lambda+2 \Leftrightarrow -2\lambda-3 = \lambda+2 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{3}$$

Άρα δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η (2).

ΑΣΚΗΣΗ (4_1955)

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A , t_B , t_Γ και t_Δ , για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

- $t_A < t_B$
- $t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3}$ και
- $|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$

α) i. Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A + t_B = 6 \text{ και } t_A \cdot t_B = 8$$

i. Να γράψετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B .

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

(Μονάδες 5)

Λύση

α) i. Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε:

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta| \Leftrightarrow t_A - t_\Delta = t_B - t_\Delta \quad \text{ή} \quad t_A - t_\Delta = -(t_B - t_\Delta)$$

Οπότε:

- $t_A - t_\Delta = t_B - t_\Delta \Leftrightarrow t_A - t_B = 0 \Leftrightarrow t_A = t_B$. Ατοπο γιατί $t_A < t_B$ από την υπόθεση,
ή
- $t_A - t_\Delta = -(t_B - t_\Delta) \Leftrightarrow t_A - t_\Delta = -t_B + t_\Delta \Leftrightarrow t_A + t_B = 2t_\Delta \Leftrightarrow t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$

ii. Θα συγκρίνουμε τους χρόνους ανά δύο, παίρνοντας τις διαφορές τους.

- Συγκρίνουμε t_Γ με t_A .

$$t_\Gamma - t_A = \frac{t_A + 2t_B}{3} - t_A = \frac{t_A + 2t_B - 3t_A}{3} = \frac{2t_B - 2t_A}{3} = \frac{2(t_B - t_A)}{3} > 0 \text{ γιατί } t_B > t_A.$$

$$\text{Άρα } t_\Gamma - t_A > 0 \Leftrightarrow \boxed{t_\Gamma > t_A} \quad (1).$$

- Συγκρίνουμε t_Γ με t_B .

$$t_\Gamma - t_B = \frac{t_A + 2t_B}{3} - t_B = \frac{t_A + 2t_B - 3t_B}{3} = \frac{t_A - t_B}{3} < 0 \text{ γιατί } t_A < t_B.$$

$$\text{Άρα } t_\Gamma - t_B < 0 \Leftrightarrow \boxed{t_\Gamma < t_B} \quad (2).$$

$$\text{Από τις (1) και (2) έχουμε μέχρι στιγμής } \boxed{t_A < t_\Gamma < t_B} \quad (3).$$

- Συγκρίνουμε t_Δ με t_B (που είναι το μεγαλύτερο ως τώρα)

$$t_\Delta - t_B = \frac{t_A + t_B}{2} - t_B = \frac{t_A + t_B - 2t_B}{2} = \frac{t_A - t_B}{2} < 0 \text{ γιατί } t_A < t_B.$$

$$\text{Άρα } t_\Delta - t_B < 0 \Leftrightarrow \boxed{t_\Delta < t_B} \quad (4).$$

- Αφού από τη σχέση (4) προέκυψε το t_Δ να είναι μικρότερο του t_B , συγκρίνουμε t_Δ με t_Γ . (Αν προέκυπτε $t_\Delta > t_B$, δεν θα υπήρχε η ανάγκη σύγκρισης των t_Δ και t_Γ)

$$t_\Delta - t_\Gamma = \frac{t_A + t_B}{2} - \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{3t_A + 3t_B - 2t_A - 4t_B}{6} = \frac{t_A - t_B}{6} < 0 \text{ γιατί } t_A < t_B.$$

$$\text{Άρα } t_\Delta - t_\Gamma < 0 \Leftrightarrow \boxed{t_\Delta < t_\Gamma} \quad (5)$$

- Συγκρίνουμε t_Δ με t_A .

$$t_\Delta - t_A = \frac{t_A + t_B}{2} - t_A = \frac{t_A + t_B - 2t_A}{2} = \frac{t_B - t_A}{2} > 0 \text{ γιατί } t_A < t_B.$$

$$\text{Άρα } t_\Delta - t_A > 0 \Leftrightarrow \boxed{t_\Delta > t_A} \quad (6).$$

Τελικά από τις σχέσεις (3), (4), (5) και (6), για τους χρόνους των τεσσάρων αθλητών προκύπτει ότι $\boxed{t_A < t_\Delta < t_\Gamma < t_B}$.

β) i. Η εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 για τους οποίους γνωρίζουμε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο τους $P = x_1 \cdot x_2$ είναι η $x^2 - Sx + P = 0$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση 2^{ov} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B με $S = t_A + t_B = 6$ και $P = t_A \cdot t_B = 8$ είναι η $t^2 - St + P = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 8 = 0$ με $t > 0$.

ii) Η δευτεροβάθμια εξίσωση $t^2 - 6t + 8 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$$

και ρίζες:

$$t_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

Από την υπόθεση όμως $t_A < t_B$, οπότε θα είναι $t_A = t_1 = 2 \text{ min}$ και $t_B = t_2 = 4 \text{ min}$.

Επομένως,

$$t_T = \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{2 + 2 \cdot 4}{3} = \frac{10}{3} \text{ min και } t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3 \text{ min}.$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_2055)

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

1. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ov} βαθμού
(Μονάδες 6)

2. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1)

παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$.

(Μονάδες 6)

3. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει
δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

4. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^{ov} βαθμού.

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

1. Η εξίσωση (1), θα παριστάνει εξίσωση 2^{ov} βαθμού αν ο συντελεστής του x^2 δεν είναι μηδέν, δηλαδή αν

$$(\lambda^2 - \lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 1).$$

2. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται,

$$\lambda(\lambda - 1)x^2 - (\lambda - 1)(\lambda + 1)x + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)[\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1] = 0$$

$$\stackrel{\lambda - 1 \neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$$

3. Η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$ έχει διακρίνουσα,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda+1)]^2 - 4\lambda = (\lambda+1)^2 - 4\lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2 > 0$$

που ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$

Άρα η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$

4. Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες που δίνονται από τον τύπο,

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-[-(\lambda+1)] \pm \sqrt{(\lambda-1)^2}}{2\lambda} = \frac{(\lambda+1) \pm (\lambda-1)}{2\lambda}$$

άρα,

$$\left(x = \frac{(\lambda+1) + (\lambda-1)}{2\lambda} = \frac{2\lambda}{2\lambda} = 1 \text{ ή } x = \frac{(\lambda+1) - (\lambda-1)}{2\lambda} = \frac{2}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda} \right)$$

Άρα $x = 1$ ή $x = \frac{1}{\lambda}$

ΑΣΚΗΣΗ (4_2332)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

Μονάδες 10

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

Μονάδες 5

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ .

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - \lambda^2) = 16 - 8 + 4\lambda^2 = 4\lambda^2 + 12 > 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

αφού $\lambda^2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3 \geq 3 > 0$, άρα, η (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους

Vieta: $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $P = \frac{\gamma}{\alpha}$ άρα

$$(i) S = x_1 + x_2 = -\frac{-4}{1} = 4$$

$$(ii) P = x_1 \cdot x_2 = \frac{2 - \lambda^2}{1} = 2 - \lambda^2$$

γ) (i) Αν $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ τότε από (β)(i) θα ισχύει:

$$(2 + \sqrt{3}) + x_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 4 - 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

(ii) Από (β)(ii) θα έχουμε

$$x_1 \cdot x_2 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow 2^2 - \sqrt{3}^2 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow 4 - 3 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4654)

1. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

2. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι:

Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 15)

ΛΥΣΗ

1. Η εξίσωση ισοδύναμα,

$$(x^2)^2 - 7x^2 + 12 = 0 \quad (2)$$

και θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$, οπότε η (2) γίνεται

$$\omega^2 - 7\omega + 12 = 0 \quad , \text{ με } \omega \geq 0$$

Για το τριώνυμο έχουμε διακρίνουσα,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1 > 0$$

άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες,

$$\omega = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \left\{ \omega_1 = \frac{7+1}{2} = 4 > 0 \quad \text{ή} \quad \omega_2 = \frac{7-1}{2} = 3 > 0 \right\} \text{ δεκτές.}$$

Για

$$\omega = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{4} \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = -2$$

Και για

$$\omega = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{3}$$

επομένως η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες,

$$x = -\sqrt{3} \text{ , } x = \sqrt{3} \text{ , } x = 2 \text{ , } x = -2$$

2. Α' τρόπος

Η εξίσωση ισοδύναμα,

$$(x^2)^2 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (3)$$

και θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$, οπότε η (3) γίνεται

$$\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0 \quad (4) \text{ με } \omega \geq 0$$

Για το τριώνυμο έχουμε διακρίνουσα,

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma$$

και αν $\beta^2 - 4\gamma > 0$ είναι $\Delta > 0$ επομένως η εξίσωση (4) έχει δύο πραγματικές και άνισες.

Έστω αυτές ω_1, ω_2 , τότε, αν

$$\beta < 0 \Leftrightarrow -\beta > 0 \text{ τότε}$$

$$S = \frac{-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \omega_1 + \omega_2 = -\beta > 0$$

και αν $\gamma > 0$ τότε

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \omega_1 \cdot \omega_2 = \gamma > 0$$

Επομένως οι ρίζες ω_1, ω_2 είναι θετικές, δηλαδή

$$\text{αν } \omega = \omega_1 \Rightarrow x^2 = \omega_1 > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\omega_1}$$

$$\text{και όμοια αν } \omega = \omega_2 \Rightarrow x^2 = \omega_2 > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\omega_2}$$

Επομένως η εξίσωση (3) έχει 4 διαφορετικές πραγματικές ρίζες αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$

Β' τρόπος

Η εξίσωση ισοδύναμα, $(x^2)^2 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (3)$ και θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$, οπότε η (3) $\Leftrightarrow \omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0 \quad (4)$ με $\omega \geq 0$

Για το τριώνυμο έχουμε διακρίνουσα, $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$

και αν $\beta^2 - 4\gamma > 0$ είναι $\Delta > 0$ επομένως η εξίσωση (4) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες,

$$\omega = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Rightarrow \omega = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \text{ ή } \omega = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$$

Τώρα, αν $\beta < 0 \Leftrightarrow -\beta > 0$, έχουμε

$$\omega = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} > 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}$$

Ακόμη,

$$\begin{aligned} -\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} > 0 &\Leftrightarrow -\beta > \sqrt{\beta^2 - 4\gamma} > 0 \Leftrightarrow (-\beta)^2 > (\sqrt{\beta^2 - 4\gamma})^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \beta^2 > \beta^2 - 4\gamma \Leftrightarrow 4\gamma > 0 \Leftrightarrow \gamma > 0 \end{aligned}$$

Άρα αν $\gamma > 0$ τότε

$$\omega = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}$$

Επομένως η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ έχει τέσσερις πραγματικές ρίζες αν ρίζες $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$ και είναι οι

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}, \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4665)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 5)

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

3. Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$.

(Μονάδες 10)

Λύση

1. Είναι

$$x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0 \quad (1)$$

όπου $a = 1$, $\beta = -\lambda$ και $\gamma = -(\lambda^2 + 5)$

με διακρίνουσα,

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-(\lambda^2 + 5)] = \lambda^2 + 4 \cdot (\lambda^2 + 5) = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 20 = 5\lambda^2 + 20$$

2. Έχουμε $\Delta = 5\lambda^2 + 20 > 0$, αφού $5\lambda^2 \geq 0$ και $20 > 0$, οπότε η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Είναι x_1, x_2 οι δύο άνισες και πραγματικές ρίζες. Από τους τύπους του Vieta έχουμε ότι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} = -\frac{-\lambda}{1} = \lambda$$

και

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a} = \frac{-(\lambda^2 + 5)}{1} = -(\lambda^2 + 5)$$

άρα,

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = -4 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow P - 2S + 8 = 0 \Leftrightarrow -(\lambda^2 + 5) - 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -3$$

αφού το τριώνυμο $-\lambda^2 - 2\lambda + 3$ έχει $\alpha = -1$, $\beta = -2$ και $\gamma = 3$
και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4(-1) \cdot 3 = 16$$

και ρίζες

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{2+4}{-2} = -3 \\ \text{ή} \\ \frac{2-4}{-2} = 1 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4667)

1. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1).

(Μονάδες 10)

2. Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α , β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

(Μονάδες 8)

Λύση

1. Είναι

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad (1)$$

$\alpha = 1$, $\beta = -3$ και $\gamma = -4$

με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4(-4) \cdot 1 = 25$$

και έχει ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \text{ή} \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}.$$

Συνεπώς $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -1$.

2. i) Θέτουμε όπου $x = \frac{\alpha}{\beta}$ στο τριώνυμο $x^2 - 3x - 4$, έχουμε,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 3\frac{\alpha}{\beta} - 4 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} - 3\frac{\alpha\beta}{\beta^2} - \frac{4\beta^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2}{\beta^2} = \frac{0}{\beta^2} = 0,$$

άρα ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 3x - 4 = 0$.

ii) Αφού ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 3x - 4 = 0$, από το (α) ερώτημα

έχουμε ότι: $\frac{\alpha}{\beta} = 4$ ή $\frac{\alpha}{\beta} = -1$.

Όμως οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι, οπότε η περίπτωση $\frac{\alpha}{\beta} = -1$ απορρίπτεται αφού το κλάσμα δύο ομόσημων αριθμών είναι πάντα θετικός αριθμός, άρα δε μπορεί να ισούται με -1 . Συνεπώς ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4\beta$, δηλαδή ο α είναι τετραπλάσιος του β

ΑΣΚΗΣΗ (4_4680)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 10)

2. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

3. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

(Μονάδες 9)

Λύση

1. Η εξίσωση

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$$

έχει

$$\alpha = 1, \beta = -1 \text{ και } \gamma = \lambda - \lambda^2$$

με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$$

Επομένως αφού $\Delta \geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει $\Delta = 0$.

Έχουμε λοιπόν:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

3. Οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$$

με $\alpha = 1, \beta = -1$ και $\gamma = \lambda - \lambda^2$ με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$$

και ρίζες,

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(2\lambda - 1)^2}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{1 + (2\lambda - 1)}{2} = \frac{1 + 2\lambda - 1}{2} = \frac{2\lambda}{2} = \lambda \\ \text{ή} \\ \frac{1 - (2\lambda - 1)}{2} = \frac{1 - 2\lambda + 1}{2} = \frac{2 - 2\lambda}{2} = \frac{2(1 - \lambda)}{2} = 1 - \lambda \end{cases}$$

άρα $x = \lambda$ ή $x = 1 - \lambda$

Επομένως ,

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = |\lambda - (1 - \lambda)| = |\lambda - 1 + \lambda| = |2\lambda - 1|$$

Όμως ,

$$0 < d(x_1, x_2) < 2 \Leftrightarrow 0 < |x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow 0 < |2\lambda - 1| < 2$$

Είναι $|2\lambda - 1| \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα $|2\lambda - 1| > 0$ για κάθε $\lambda \neq \frac{1}{2}$ αφού είναι

$$|2\lambda - 1| = 0 \text{ όταν } 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

Επίσης,

$$|2\lambda - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < 2\lambda - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < 2\lambda < 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}.$$

$$\text{Άρα } \lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4681)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 10)

2. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

3. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για

$$\text{ποιες τιμές του } \lambda \text{ ισχύει } d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}.$$

(Μονάδες 9)

Λύση

1. Η εξίσωση

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$$

έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$ και $\gamma = \lambda - \lambda^2$

και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$$

Επομένως αφού $\Delta \geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες ίσες πρέπει

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

3. Οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$$

με $\alpha = 1$, $\beta = -1$ και $\gamma = \lambda - \lambda^2$

και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$$

με ρίζες,

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(2\lambda - 1)^2}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{1 + (2\lambda - 1)}{2} = \frac{1 + 2\lambda - 1}{2} = \frac{2\lambda}{2} = \lambda \\ \text{ή} \\ \frac{1 - (2\lambda - 1)}{2} = \frac{1 - 2\lambda + 1}{2} = \frac{2 - 2\lambda}{2} = \frac{2(1 - \lambda)}{2} = 1 - \lambda \end{cases}$$

άρα $x = \lambda$ ή $x = 1 - \lambda$

Επομένως

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = |\lambda - (1 - \lambda)| = |\lambda - 1 + \lambda| = |2\lambda - 1|$$

Άρα για $\lambda \neq \frac{1}{2}$ έχουμε:

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)} \Leftrightarrow |2\lambda - 1| = \frac{1}{|2\lambda - 1|} \Leftrightarrow |2\lambda - 1|^2 = 1 \Leftrightarrow |2\lambda - 1| = 1 \text{ ή } |2\lambda - 1| = -1$$

$|2\lambda - 1| = -1$ αδύνατη, αφού $|2\lambda - 1| \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Επομένως

$$|2\lambda - 1| = 1 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 1 \text{ ή } 2\lambda - 1 = -1.$$

Δηλαδή $\lambda = 1$ ή $\lambda = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4819)

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

1. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

2. Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

3. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i) Να δείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$.

(Μονάδες 4)

ii) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

$$f(x_2), \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \quad f(x_2 + 1)$$

(Μονάδες 5)

Λύση

1. Η εξίσωση

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$$

έχει $\alpha = 1$, $\beta = -1$ και $\gamma = \lambda - \lambda^2$

και διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$$

Επομένως αφού $\Delta \geq 0$ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Για να έχει το τριώνυμο δύο ρίζες ίσες πρέπει

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

3. i) Έχουμε,

$$x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < x_1 + x_2 < 2x_2,$$

που προφανώς ισχύει, αφού

$$2x_1 < x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ και } x_1 + x_2 < 2x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ που ισχύει από υπόθεση.}$$

ii) Αφού x_1, x_2 είναι δύο άνισες ρίζες, το πρόσημο του τριωνύμου είναι:

- $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ (ετερόσημο του $a = 1 > 0$)
- $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ (ομόσημο του a)
- και $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Άρα αφού

$$x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$$

Επίσης

$$x_2 + 1 > x_2 \Rightarrow (x_2 + 1) \in (x_2, +\infty) \Rightarrow f(x_2 + 1) > 0$$

Επομένως

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < f(x_2) = 0 < f(x_2 + 1)$$

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση: $\lambda = (2x + 5)^2 - 8x$ (1)

1. Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος;
(Μονάδες 6)
2. Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 , ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;
(Μονάδες 6)
3. Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:
 - i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5 .
(Μονάδες 6)
 - ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ .
(Μονάδες 7)

Λύση

1. Αν ο λοιπόν ο εισαγόμενος αριθμός $x = -5$ τότε:

$$\lambda = (2(-5) + 5)^2 - 8(-5) = (-5)^2 + 40 = 65.$$

2. Αν ο εξαγόμενος αριθμός $\lambda = 20$, τότε

$$20 = (2x + 5)^2 - 8x \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 5 = 0.$$

Το τριώνυμο $4x^2 + 12x + 5$ έχει $\alpha = 4$, $\beta = 12$ και $\gamma = 5$, με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 144 - 80 = 64 > 0$$

και συνεπώς η εξίσωση $4x^2 + 12x + 5 = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 8}{8} \Leftrightarrow \left\{ x_1 = -\frac{1}{2} \text{ ή } x_2 = -\frac{5}{2} \right\}$$

3. Η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \Leftrightarrow \lambda = 4x^2 + 12x + 25 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$$

- i) Αν $\lambda = 5$ τότε πράγματι η εξίσωση γίνεται

$$4x^2 + 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 5 = 0$$

με $\alpha = 1$, $\beta = 3$ και $\gamma = 5$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0$$

δηλαδή είναι αδύνατη (δηλαδή δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του εισαγόμενου αριθμού x).

- ii) Για να επαληθεύεται για κάποια τιμή του εισαγόμενου αριθμού x η σχέση

$$4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$$

(δηλαδή να έχει πραγματικές ρίζες η εξίσωση), πρέπει $\Delta \geq 0$.

Αφού $\alpha = 4$, $\beta = 12$ και $\gamma = 25 - \lambda$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 12^2 - 4 \cdot 4(25 - \lambda) = 144 - 16(25 - \lambda) = -256 + 16\lambda$$

$$\text{όμως, } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -256 + 16\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 16$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4835)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

1. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β .

(Μονάδες 6)

2. Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$.

(Μονάδες 7)

3. Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

Λύση

1. Έχουμε, $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha = 1$, $\beta = -\beta$ και $\gamma = \gamma$, από τους τύπους Vieta παίρνουμε,

$$|x_1 + x_2| = 4 \Leftrightarrow |S| = 4 \Leftrightarrow \left| \frac{-(-\beta)}{1} \right| = 4 \Leftrightarrow |\beta| = 4.$$

Άρα $\beta = 4$ ή $\beta = -4$.

2. Αφού η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, έχουμε

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-\beta)^2 - 4\gamma > 0 \Rightarrow 4\gamma < \beta^2 \Rightarrow 4\gamma < \beta^2 \Rightarrow 4\gamma < |\beta|^2 \Rightarrow 4\gamma < 16 \Rightarrow \gamma < 4$$

3. Είναι,

$$x^2 - \beta|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - \beta|x| + 3 = 0.$$

Αν θέσουμε $|x| = \omega$ η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - \beta\omega + 3 = 0$.

Για $\beta = 4$ έχουμε $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0$, άρα $\alpha = 1$, $\beta = -4$ και $\gamma = 3$ και διακρίνουμε,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$$

με ρίζες,

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \text{ή} \\ \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

άρα $\omega = 1$ ή $\omega = 3$, οπότε

$$|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ ή } |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Όμοια για $\beta = -4$ έχουμε

$$\omega^2 + 4\omega + 3 = 0 ,$$

όπου $\alpha = 1$, $\beta = 4$ και $\gamma = 3$ και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$$

με ρίζες

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{-4+2}{2} = \frac{2}{2} = -1 \\ \text{ή} \\ \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases} \quad \text{άρα } \omega = -1 \text{ ή } \omega = -3$$

Άρα $|x| = -1$ αδύνατη ή $|x| = -3$ αδύνατη.

Επομένως για $\beta = -4$ η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4836)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
(Μονάδες 8)
2. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.
(Μονάδες 5)
3. Για $\lambda > 2$, να αποδείξετε ότι:
 - i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.
 - ii) $x_1 + 4x_2 \geq 4$.

(Μονάδες 12)

Λύση

1. Για να έχει η εξίσωση

$$x^2 - \lambda x + 1 = 0 \quad (1)$$

ρίζες πραγματικές και άνισες, θα πρέπει $\Delta > 0$.

Είναι: $\alpha = 1$, $\beta = -\lambda$ και $\gamma = 1$ με διακρίνουσα,

$$\Delta = (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = \lambda^2 - 4$$

όμως $\Delta > 0$, οπότε,

$$\lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow |\lambda| > 2 \Leftrightarrow \lambda < -2 \text{ ή } \lambda > 2.$$

2. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε επαληθεύει τη σχέση (1), δηλαδή $\rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0$. (2)

Ο αριθμός ρ είναι προφανώς διάφορος του μηδενός, γιατί διαφορετικά θα είχαμε $0 - 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ το οποίο είναι άτοπο.

Ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει τη σχέση (1), αφού:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 - \lambda\left(\frac{1}{\rho}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho^2} - \frac{\lambda}{\rho} + 1 = 0 \Leftrightarrow \rho^2 - \lambda\rho + 1 = 0 \text{ που ισχύει από την (2)}$$

3. i) Από τους τύπους Vieta παίρνουμε:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \lambda \text{ και } x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 1$$

Επομένως για $\lambda > 2$ έχουμε $x_1 + x_2 > 0$ και $x_1 x_2 > 0$, δηλαδή οι ρίζες x_1, x_2 είναι ομόσημοι αριθμοί με άθροισμα θετικό.

Άρα οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί

ii) Αφού x_1, x_2 είναι αριθμοί θετικοί, έχουμε:

$$x_1 + 4x_2 \geq 4 \Leftrightarrow (x_1 + 4x_2)^2 \geq 16 \Leftrightarrow x_1^2 + 8x_1 x_2 + 16x_2^2 \geq 16 \quad (3)$$

Όμως $x_1 x_2 = 1$, άρα η (3) γράφεται ισοδύναμα

$$x_1^2 + 8x_1 x_2 + 16x_2^2 \geq 16x_1 x_2 \Leftrightarrow x_1^2 - 8x_1 x_2 + 16x_2^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x_1 - 4x_2)^2 \geq 0,$$

που ισχύει για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2 .

ΑΣΚΗΣΗ (4_4857)

Δίνεται η εξίσωση

$$a\beta x^2 - (a^2 + \beta^2)x + a\beta = 0$$

όπου a, β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (a^2 - \beta^2)^2$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών a και β , ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των a, β

(Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{a}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{a}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 0$$

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Χρησιμοποιώντας τον τύπο της διακρίνουσας έχουμε:

$$\Delta = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha\beta\alpha\beta = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 4\alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$$

β) Η δευτεροβάθμια εξίσωση θα έχει δύο ρίζες άνισες, αν και μόνο αν:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2)^2 > 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \neq 0 \quad (1)$$

Από υπόθεση $\alpha, \beta > 0$, άρα και $\alpha + \beta > 0$

Επομένως από την (1) ισοδύναμα έχουμε: $\alpha - \beta \neq 0$, δηλαδή $\alpha \neq \beta$ που αποτελεί και τη ζητούμενη σχέση μεταξύ των θετικών αριθμών α, β

Οι ρίζες της εξίσωσης θα είναι:

$$x_{1,2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 \pm (\alpha^2 - \beta^2)}{2\alpha\beta} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2\alpha^2}{2\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \\ \text{ή} \\ x_2 = \frac{2\beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

γ) Έχουμε,

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\beta}{\beta\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 2 \geq 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \geq 2 \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ανίσωσης με $\alpha\beta > 0$, οπότε η (2) ισοδύναμα γράφεται: $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, η οποία προφανώς ισχύει για κάθε $\alpha, \beta > 0$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4903)

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο της διακρίνουσας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, προκύπτει:

$$\Delta = (2\lambda - 1)^2 - 4\lambda(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 1 > 0$$

ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

β) Είναι

$$x_{1,2} = \frac{-(2\lambda-1) \pm \sqrt{1}}{2\lambda} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2\lambda+1+1}{2\lambda} = \frac{-2\lambda+2}{2\lambda} = \frac{2(-\lambda+1)}{2\lambda} = \frac{-\lambda+1}{\lambda} \\ \text{ή} \\ x_2 = \frac{-2\lambda+1-1}{2\lambda} = \frac{-2\lambda}{2\lambda} = -1 \end{cases}$$

γ) Γνωρίζουμε ότι απόσταση δύο αριθμών x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, ορίζεται ως η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.

Επομένως θα πρέπει να βρούμε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, ώστε να ισχύει:

$$|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{-\lambda+1}{\lambda} - (-1) \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{-\lambda+1}{\lambda} + 1 \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{-\lambda+1}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda} \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\lambda} \right| = 2 \Leftrightarrow$$
$$\frac{|1|}{|\lambda|} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{|\lambda|} = 2 \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \text{ή} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4957)

Δίνεται το τριώνυμο

$$\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

(Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο της διακρίνουσας, προκύπτει:

$$\Delta = (\lambda^2 + 1)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0,$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \neq 0$

β) Εφαρμόζοντας τους τύπους Vieta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών ενός τριωνύμου, για $\lambda \neq 0$ έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-[-(\lambda^2 + 1)]}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$$

και

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) Αφού το γινόμενο των ριζών x_1, x_2 του τριωνύμου είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες του θα είναι ομόσημες. Το αν θα είναι θετικές ή αρνητικές εξαρτάται από το άθροισμά τους S . Είναι $\lambda^2 + 1 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda > 0$

Άρα $S = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} > 0$, που σημαίνει ότι οι ρίζες του τριωνύμου θα είναι θετικές.

δ) Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι για $\lambda > 0$ είναι

$$S = x_1 + x_2 = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} > 0 \text{ και } P = x_1 \cdot x_2 = 1 > 0$$

Έχουμε,

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq x_1 + x_2 \Leftrightarrow 2\sqrt{1} \leq \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} \Leftrightarrow 2 \leq \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} \quad (1)$$

Όμως $\lambda > 0$, άρα η (1) ισοδύναμα γίνεται:

$$2\lambda \leq \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0,$$

που προφανώς ισχύει για κάθε $\lambda > 0$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4962)

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

(Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνεται τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο της διακρίνουσας, προκύπτει:

$$\Delta = (\lambda^2 + 1)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0,$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, οπότε το τριώνυμο ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \neq 0$

β) Εφαρμόζοντας τους τύπους Vieta για το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών ενός τριωνύμου, για $\lambda \neq 0$ έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{-[-(\lambda^2 + 1)]}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$$

και

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

γ) Αφού το γινόμενο των ριζών x_1, x_2 του τριωνύμου είναι $P = 1 > 0$ οι ρίζες του θα είναι ομόσημες. Το αν θα είναι θετικές ή αρνητικές εξαρτάται από το άθροισμά τους S

Είναι $\lambda^2 + 1 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda > 0$, άρα $S = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} > 0$, που σημαίνει ότι οι ρίζες του τριωνύμου θα είναι θετικές.

δ) Έστω

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2 \Leftrightarrow S > 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} > 2 \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1) με $\lambda > 0$ ισοδύναμα έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \lambda \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} > 2\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 > 2\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 > 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 > 0,$$

που ισχύει για κάθε $0 < \lambda \neq 1$

Οπότε ο αριθμός $\frac{x_1 + x_2}{2}$ (όπου x_1, x_2 οι ρίζες του αρχικού τριωνύμου) είναι μικρότερος του αριθμού 1

ΑΣΚΗΣΗ (4_4970)

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$2x^2 - \lambda x - 36 = 0$$

(Μονάδες 7)

ii) Να δείξετε ότι:

• $\rho \neq 0$ και

• ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$

(Μονάδες 4+6=10)

ΛΥΣΗ

α) Εφαρμόζοντας τον τύπο της διακρίνουσας στην εξίσωση (1) έχουμε:

$$\Delta = \lambda^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36) = \lambda^2 + 288 > 0$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, οπότε η δευτεροβάθμια εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

β) i) Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) θα την επαληθεύει, δηλαδή θα ισχύει:

$$2\rho^2 + \lambda \cdot \rho - 36 = 0 \Leftrightarrow 2(-\rho)^2 - \lambda(-\rho) - 36 = 0,$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$

ii) Έχουμε,

• Ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), άρα όπως είπαμε θα την επαληθεύει. Αν υποθέσουμε ότι $\rho = 0$, τότε θα ισχύει: $2 \cdot 0^2 + \lambda \cdot 0 - 36 = 0 \Leftrightarrow -36 = 0$ που είναι άτοπο. Άρα $\rho \neq 0$

• Αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) θα ισχύει $2\rho^2 + \lambda \cdot \rho - 36 = 0$ (2)

Δείξαμε ότι $\rho \neq 0$, οπότε διαιρώντας και τα δύο μέλη της (2) με $\rho^2 \neq 0$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{2\rho^2 + \lambda \cdot \rho - 36}{\rho^2} &= \frac{0}{\rho^2} \Leftrightarrow \frac{2\rho^2}{\rho^2} + \frac{\lambda \cdot \rho}{\rho^2} - \frac{36}{\rho^2} = 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{36}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} + 2 &= 0 \Leftrightarrow -36\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \lambda\left(\frac{1}{\rho}\right) + 2 = 0 \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ (4_4975)

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

Μονάδες 10

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι:

Αν $\gamma < 0$ τότε:

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$

Μονάδες 3

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$, τότε η εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ γίνεται $\omega^2 - 8\omega - 9 = 0$

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 64 + 36 = 100 > 0,$$

επομένως η εξίσωση έχει δυο ρίζες διαφορετικές.

Αν ω_1, ω_2 οι ρίζες της εξίσωσης, ισχύει $\omega_1 \cdot \omega_2 = -9 < 0$ συνεπώς ω_1, ω_2 ετερόσημες.

Έστω $\omega_1 > 0$ και $\omega_2 < 0$ απορρίπτεται ($x^2 = \omega \geq 0$), τότε $x^2 = \omega_1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\omega_1}$

Άρα η διτετράγωνη εξίσωση έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες.

Ανάλογο συμπέρασμα προκύπτει αν $\omega_1 < 0$ και $\omega_2 > 0$

Για τον υπολογισμό των ριζών έχουμε:

Η εξίσωση $\omega^2 - 8\omega - 9 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 64 + 36 = 100$$

Και ρίζες

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{8 \pm 10}{2}$$

άρα,

$$\omega_1 = \frac{8+10}{2} = 9 \text{ και } \omega_2 = \frac{8-10}{2} = -1 \text{ απορρίπτεται}$$

Συνεπώς $\omega = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Άρα η εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ έχει ρίζες, τις 3 και -3.

β) i) Ισχύει

$$\gamma < 0 \Leftrightarrow -4\gamma > 0 \text{ και } \beta^2 \geq 0$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω ανισότητες κατά μέλη προκύπτει

$$\beta^2 - 4\gamma > 0$$

ii) Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$, τότε η εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, γίνεται $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0$$

οπότε η εξίσωση $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες ω_1, ω_2 .

Επειδή ισχύει $\omega_1 \cdot \omega_2 = \gamma < 0$ οι ρίζες είναι ετερόσημες. Έστω $\omega_1 > 0$ και $\omega_2 < 0$

απορρίπτεται (αφού $x^2 = \omega \geq 0$), τότε $x^2 = \omega_1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\omega_1}$

Ανάλογο συμπέρασμα προκύπτει αν $\omega_1 < 0$ και $\omega_2 > 0$

Άρα η εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ (4_4992)

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34 \text{ cm}$ και διαγώνιο $\delta = 13 \text{ cm}$

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60 \text{ cm}^2$

Μονάδες 5

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

Μονάδες 5

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

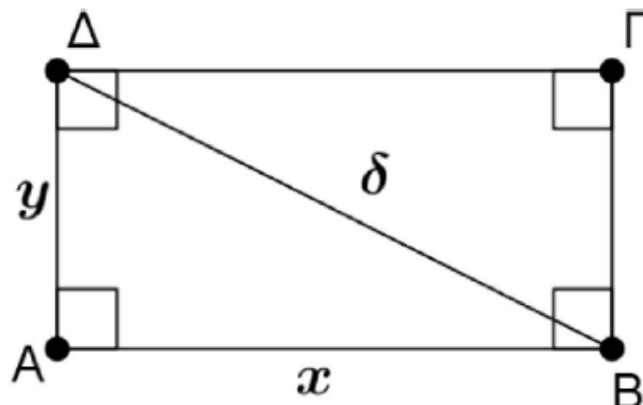
Μονάδες 5

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) i) Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου



Τότε η περίμετρός του είναι $\Pi = 2x + 2y$ και το εμβαδόν του $E = xy$
άρα

$$2x + 2y = 34 \Leftrightarrow x + y = 17$$

Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ προκύπτει

$$x^2 + y^2 = \delta^2 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = 13^2 \Leftrightarrow 17^2 - 2xy = 169 \Leftrightarrow 289 - 169 = 2xy \Leftrightarrow xy = 60$$

Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60 \text{ cm}^2$

ii) Αφού για τις πλευρές του ορθογωνίου ισχύει $x + y = 17$ και $xy = 60$

η εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι η

$$\omega^2 - 17\omega + 60 = 0$$

iii) Η εξίσωση $\omega^2 - 17\omega + 60 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 289 - 240 = 49$$

Και ρίζες

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{17 \pm 7}{2}$$

άρα,

$$\omega_1 = \frac{17+7}{2} = 12 \text{ και } \omega_2 = \frac{17-7}{2} = 5$$

Άρα τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι 12 cm και 5 cm.

β) Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε το εμβαδόν του $E = xy$

άρα $xy = 40$.

Από Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει,

$$x^2 + y^2 = \delta^2 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = 8^2 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 80 = 64 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 144 \Leftrightarrow x + y = 12$$

Έχουμε λοιπόν:

$$x + y = 12 \text{ και } xy = 40$$

η εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι η

$$\omega^2 - 12\omega + 40 = 0 \text{ αδύνατη (αφού έχει διακρίνουσα } \Delta = 144 - 160 = -16 < 0)$$

Άρα δεν υπάρχει ορθογώνιο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm^2

ΑΣΚΗΣΗ (4_5317)

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

Μονάδες 10

β) Να κατασκευάσετε μια διτετράγωνη εξίσωση της μορφής

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$$

η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$, τότε η εξίσωση $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$, γίνεται $\omega^2 - 9\omega + 20 = 0$

Αν ω_1, ω_2 οι ρίζες της τελευταίας ισχύει

$$\omega_1 + \omega_2 = 9 > 0 \text{ και } \omega_1 \cdot \omega_2 = 20 > 0$$

συνεπώς ω_1, ω_2 θετικές (με $\omega_1 \neq \omega_2$)

Τότε

$$x^2 = \omega_1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\omega_1} \quad \text{ή} \quad x^2 = \omega_2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\omega_2}$$

Άρα η διτετράγωνη εξίσωση έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Για τον υπολογισμό των ριζών έχουμε:

Η εξίσωση $\omega^2 - 9\omega + 20 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 81 - 80 = 1$$

Και ρίζες

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{9 \pm 1}{2}$$

άρα,

$$\omega_1 = \frac{9+1}{2} = 5 \quad \text{και} \quad \omega_2 = \frac{9-1}{2} = 4$$

Συνεπώς

$$x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5} \quad \text{ή} \quad x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Άρα η εξίσωση $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$ έχει τις $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, -2 και 2

β) Για να έχει η διτετράγωνη εξίσωση δύο μόνο πραγματικές ρίζες θα πρέπει το τριώνυμο που προκύπτει (κάνοντας την αντικατάσταση $x^2 = \omega \geq 0$) να έχει μια θετική και μια αρνητική ρίζα, αφού η αρνητική ρίζα απορρίπτεται και η θετική δίνει δύο ρίζες.

Έστω ότι η εξίσωση 2^{ου} βαθμού $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ (που προκύπτει κάνοντας την αντικατάσταση $x^2 = \omega \geq 0$) έχει ρίζες τις $\omega_1 = 9$ και $\omega_2 = -2$

Τότε

$$\omega_1 + \omega_2 = -\beta \Leftrightarrow 9 - 2 = -\beta \Leftrightarrow \beta = -7 \quad \text{και} \quad \omega_1 \cdot \omega_2 = \gamma \Leftrightarrow 9 \cdot (-2) = \gamma \Leftrightarrow \gamma = -18$$

Άρα η διτετράγωνη που έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες είναι η

$$x^4 - 7x^2 - 18 = 0$$

Πράγματι, θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$ τότε η εξίσωση $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$ γίνεται $\omega^2 - 7\omega - 18 = 0$ με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 49 + 72 = 121$$

Και ρίζες

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{7 \pm 11}{2}$$

άρα

$$\omega_1 = \frac{7+11}{2} = 9 \quad \text{και} \quad \omega_2 = \frac{7-11}{2} = -2 \quad \text{απορρίπτεται}$$

Συνεπώς

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Άρα η εξίσωση $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$ έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΑΣΚΗΣΗ (4_6223)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες 7

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0$$

Μονάδες 9

ii) Για $\lambda = 1$ να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$

Μονάδες 9

ΛΥΣΗα) Η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25\lambda^2 + 4 > 0 \text{ (αφού } \lambda^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R})$$

Άρα η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ β) i) Αφού x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης ισχύει

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-5\lambda}{1} = 5\lambda \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$$

Ισχύει

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(5\lambda)^2 - 18 - 7(-1)^{24} = 0 \Leftrightarrow$$

$$25\lambda^2 - 18 - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$25\lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

ii) Για $\lambda = 1$ ισχύει

$$x_1 + x_2 = 5\lambda = 5 \text{ και } x_1 \cdot x_2 = -1$$

Τότε

$$x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2) + 4 = -1 \cdot 5 - 3 \cdot 5 + 4 = -16$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_6224)Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \text{ με } \lambda \in (0, 4)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Εξετάζουμε αρχικά ότι η εξίσωση που μας δίνεται έχει διακρίνουσα μη αρνητική ώστε να έχει δυο ρίζες.

Έχουμε λοιπόν: $\alpha = 1$, $\beta = -4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)$ και $\gamma = 16$, οπότε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 16\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 16\left(\lambda^2 + 2\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} - 4\right) = 16\left(\lambda^2 - 2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

δηλαδή $\Delta = 16\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \geq 0$ οπότε έχει 2 πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2 .

Επειδή ακόμη τα x_1, x_2 είναι πλευρές γεωμετρικού σχήματος πρέπει $x_1 > 0$, $x_2 > 0$

δηλαδή πρέπει να είναι ομόσημες και να έχουν άθροισμα θετικό άρα το γινόμενο τους $x_1 x_2 > 0$ και $x_1 + x_2 > 0$

Σύμφωνα με τους τύπους του Vieta είναι $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 16 > 0$ ισχύει, και

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) > 0 \text{ που ισχύει αφού } \lambda \in (0, 4)$$

i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2)$.

και επειδή από τον τύπο του Vieta έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \text{ και}$$

είναι :

$$\Pi = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right), \lambda \in (0, 4)$$

ii. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι: $E = x_1 \cdot x_2$ και επειδή από τον τύπο του Vieta έχουμε:

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 16 \text{ είναι } E = 16$$

β) Ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{aligned} \Pi \geq 16 &\Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \geq 16 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} \geq 2 \text{ (και επειδή } \lambda > 0) \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.} \end{aligned}$$

γ) Η περίμετρος Π γίνεται ελάχιστη όταν:

$$\Pi = 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) = 16 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ η αρχική εξίσωση γίνεται $x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 4}$

Η εξίσωση τότε έχει δύο ρίζες ίσες δηλαδή $x_1 = x_2 = 4$, που σημαίνει ότι οι πλευρές του ορθογωνίου είναι ίσες, επομένως έχουμε ελάχιστη περίμετρο όταν το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0, \text{ με } \lambda \in (0, 2)$$

α) Να βρείτε:

i) Την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

ii) Το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Εξετάζουμε αρχικά ότι η εξίσωση που μας δίνεται έχει διακρίνουσα μη αρνητική ώστε να έχει δυο ρίζες.

Έχουμε λοιπόν: $\alpha = 1, \beta = -2$ και $\gamma = \lambda(2 - \lambda)$, οπότε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 - 4\lambda(2 - \lambda) = 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 = 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0$$

και άρα έχει 2 πραγματικές ρίζες τις x_1, x_2 .

Πρέπει επίσης, επειδή x_1, x_2 είναι πλευρές ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι θετικές, άρα ομόσημες και με άθροισμα θετικό, δηλαδή: $x_1, x_2 > 0$, και

$x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow 2 > 0$, που ισχύει,

αλλά και

$x_1 x_2 > 0 \Rightarrow \lambda(2 - \lambda) > 0$ που ισχύει αφού $\lambda \in (0, 2) \Leftrightarrow 0 < \lambda < 2$.

i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2).$$

Σύμφωνα με το τύπο του Vieta έχουμε: $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = 2$ επομένως :

$$\Pi = 2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 2 = 4.$$

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = x_1 \cdot x_2$ και σύμφωνα με το τύπο του Vieta

είναι: $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda(2 - \lambda)$ άρα

$$E = \lambda(2 - \lambda), \lambda \in (0, 2)$$

β) Εργαζόμαστε ισοδύναμα και έχουμε :

$$E \leq 1 \Leftrightarrow \lambda(2 - \lambda) \leq 1 \Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \lambda^2 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0$$

Η τελευταία σχέση ισχύει, οπότε ισχύει και η ζητούμενη ανισότητα.

γ) Το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο, όταν:

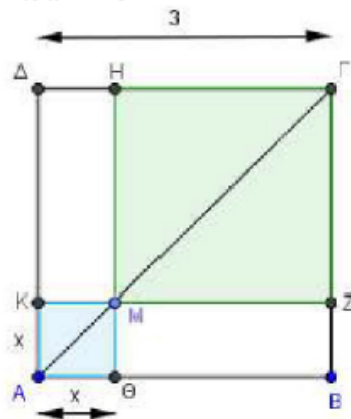
$$E = 1 \Leftrightarrow \lambda(2 - \lambda) = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Η εξίσωση έχει λοιπόν δύο ρίζες ίσες, την $x_1 = x_2 = 1$, που σημαίνει ότι οι πλευρές του ορθογώνιου είναι ίσες. Άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

ΑΣΚΗΣΗ (4_6231)

Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3$ και το M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου $ΑΓ$. Έστω E το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι $E = 2x^2 - 6x + 9$ με $x \in (0, 3)$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E \geq \frac{9}{2}$ για κάθε $x \in (0, 3)$.

(Μονάδες 8)

γ) Για ποια θέση του M πάνω στην $ΑΓ$ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ

α) Αφού μιλάμε για πλευρές τετραγώνου θα πρέπει τόσο η πλευρά του τετραγώνου $AKM\Theta$ που έχει μήκος (x) όσο και η πλευρά του τετραγώνου $H\Gamma ZM$ που έχει μήκος $(3-x)$ να είναι θετικές ποσότητες, δηλ. πρέπει $x > 0$ και $3-x > 0 \Rightarrow x < 3$, επομένως έχουμε: $0 < x < 3$

Τώρα το άθροισμα των εμβαδών των δυο τετραγώνων θα είναι ίσο με:

$$E = E_{AKM\Theta} + E_{H\Gamma ZM} = x^2 + (3-x)^2 = x^2 + 9 - 6x + x^2 = 2x^2 - 6x + 9 \text{ με } x \in (0, 3)$$

β) Αρκεί να δείξουμε: $E - \frac{9}{2} \geq 0$ για κάθε $x \in (0, 3)$ οπότε ισοδύναμα έχουμε:

$$E - \frac{9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 - \frac{9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 12x + 18 - 9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 12x + 9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(2x-3)^2}{2} \geq 0 \text{ που προφανώς ισχύει για κάθε } x \in (0, 3).$$

γ) Βρίσκουμε για ποιά x ισχύει

$$E = \frac{9}{2} \Leftrightarrow E - \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-3)^2}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ υπολογίζουμε τη διαγώνιο $A\Gamma$ του τετραγώνου.

$$\text{Έχουμε λοιπόν: } A\Gamma^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 18 \Leftrightarrow \boxed{A\Gamma = 3\sqrt{2}}$$

Ομοίως για το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Theta M$ προκύπτει:

$$AM^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AM^2 = \frac{18}{4} \Leftrightarrow \boxed{AM = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{A\Gamma}{2}}$$

Επομένως το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, όταν το σημείο M ταυτίζεται με το μέσο της διαγωνίου του τετραγώνου.

ΑΣΚΗΣΗ (4_7510)

Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε ένα ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο s_A , s_B , s_Γ και s_Δ αντίστοιχα,

ικανοποιούν τις σχέσεις: $s_A < s_B$, $s_\Gamma = \frac{s_A + 3s_B}{4}$ και $|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B|$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο O και τα σημεία A , B , παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα:



α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ , που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 12

β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A , s_B σε km ικανοποιούν τις σχέσεις $s_A + s_B = 1,4$ και $s_A \cdot s_B = 0,45$ τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A , s_B .

Μονάδες 6

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A , s_B , s_Γ και s_Δ .

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε την σχετική θέση των σημείων A , B και Γ , αρκεί να συγκρίνουμε τις αποστάσεις των 3 σπιτιών από το σχολείο, s_A , s_B και s_Γ .

Αυτό μπορεί να συμβεί αν βρούμε το πρόσημο των διαφορών $s_A - s_\Gamma$ και $s_B - s_\Gamma$

$$\text{Έτσι } s_A - s_\Gamma = s_A - \frac{s_A + 3s_B}{4} = \frac{4s_A - (s_A + 3s_B)}{4} = \frac{3s_A - 3s_B}{4} = \frac{3(s_A - s_B)}{4} < 0$$

γιατί από υπόθεση είναι

$$s_A < s_B \Leftrightarrow s_A - s_B < 0 \text{ άρα } s_A - s_\Gamma < 0 \Leftrightarrow s_A < s_\Gamma$$

Όμοια

$$s_B - s_\Gamma = s_B - \frac{s_A + 3s_B}{4} = \frac{4s_B - (s_A + 3s_B)}{4} = \frac{s_B - s_A}{4} > 0$$

$$\text{άρα } s_B - s_\Gamma > 0 \Leftrightarrow s_B > s_\Gamma$$

Συνεπώς $s_A < s_\Gamma < s_B$, δηλαδή το σημείο Γ βρίσκεται μεταξύ των A και B .

Επίσης η σχέση $|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B| \Leftrightarrow d(s_\Delta, s_A) = d(s_\Delta, s_B)$, όπου A, B, Δ

συνευθειακά σημεία, σημαίνει ότι το Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB ,

$$\text{άρα } s_A < s_\Delta < s_B.$$

Τέλος για να βρούμε τη σχετική θέση των Γ και Δ βρούμε το πρόσημο των διαφορών

$$s_\Delta - s_\Gamma$$

Έχουμε:

$$|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B| \Leftrightarrow s_\Delta - s_A = s_\Delta - s_B \text{ ή } s_\Delta - s_A = -s_\Delta + s_B$$

$$\Leftrightarrow s_A = s_B \text{ (απορρίπτεται) ή } 2s_\Delta = s_A + s_B \Leftrightarrow s_\Delta = \frac{s_A + s_B}{2}.$$

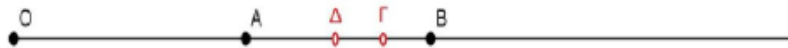
Έτσι

$$s_\Gamma - s_\Delta = \frac{s_A + 3s_B}{4} - \frac{s_A + s_B}{2} = \frac{s_A + 3s_B - 2(s_A + s_B)}{4} = \frac{s_B - s_A}{4} > 0$$

$$\text{Άρα } s_\Gamma - s_\Delta > 0 \Leftrightarrow s_\Gamma > s_\Delta$$

Τελικά τα σημεία Γ και Δ είναι μεταξύ των A και B , με το Δ να είναι αριστερά του

Γ , όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



β) i) Οι αριθμοί s_A και s_B έχουν άθροισμα $S = s_A + s_B = 1,4$ και γινόμενο $P = s_A \cdot s_B = 0,45$, άρα θα είναι οι λύσεις της εξίσωσης: $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 1,4x + 0,45 = 0$, που είναι και η ζητούμενη εξίσωση.

ii) Η εξίσωση $x^2 - 1,4x + 0,45 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1,4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,45 = 1,96 - 1,80 = 0,16 = 0,4^2 > 0,$$

και λύσεις

$$x_{1,2} = \frac{-(-1,4) \pm \sqrt{0,4^2}}{2 \cdot 1} = \frac{1,4 \pm 0,4}{2}$$

άρα

$$x_1 = \frac{1,4 + 0,4}{2} = \frac{1,8}{2} = 0,9 \text{ και } x_2 = \frac{1,4 - 0,4}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Αφού $s_A < s_B$, θα είναι $s_A = 0,5$ και $s_B = 0,9$.

Τότε

$$s_T = \frac{s_A + 3s_B}{4} \Rightarrow s_T = \frac{0,5 + 3 \cdot 0,9}{4} = 0,8$$
$$\text{και } s_\Delta = \frac{s_A + s_B}{2} \Rightarrow s_\Delta = \frac{0,5 + 0,9}{2} = 0,7.$$

Τελικά $s_A = 0,5$, $s_B = 0,9$, $s_T = 0,8$ και $s_\Delta = 0,7$

ΑΣΚΗΣΗ (4_7515)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

Μονάδες 6

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$.

Μονάδες 4

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον, $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$.

Μονάδες 7

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ .

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωσή μας είναι δευτέρου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda \Rightarrow \Delta = 4 - 4\lambda > 0$$

αφού ισχύει από υπόθεση $\lambda < 1 \Rightarrow 4\lambda < 4 \Rightarrow 4 - 4\lambda > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Σύμφωνα με τον πρώτο τύπο Vieta το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο

$$\text{με } S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}, \text{ δηλαδή } S = x_1 + x_2 = -\frac{-2}{1} = 2$$

γ) i. Έχουμε:

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2| \Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 + 2 \text{ ή } x_1 - 2 = -(x_2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 2 + 2 \text{ ή } x_1 - 2 = -x_2 - 2$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 4 \text{ ή } x_1 + x_2 = 0.$$

Ομως η δεύτερη σχέση είναι αδύνατη αφού από το (β) ερώτημα βρήκαμε ότι

$$x_1 + x_2 = 2. \text{ Συνεπώς } x_1 - x_2 = 4$$

ii. Οι σχέσεις $x_1 + x_2 = 2$ και $x_1 - x_2 = 4$, με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$2x_1 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 3, \text{ οπότε αντικαθιστώντας στην } x_1 + x_2 = 2 \text{ βρίσκουμε}$$

$$3 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 2 - 3 = -1.$$

Για το λ έχουμε:

1^{ος} τρόπος: Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης, από τον δεύτερο τύπο Vieta δίνεται από τη σχέση: $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ ή $3 \cdot (-1) = \frac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \lambda = -3 < 1$, λύση που είναι δεκτή λόγω περιορισμού.

2^{ος} τρόπος: Ο αριθμός 3 είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2x + \lambda = 0$, άρα θα την επαληθεύει, δηλαδή:

$$3^2 - 2 \cdot 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 9 - 6 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -9 + 6 \Leftrightarrow \lambda = -3 < 1$$

που είναι δεκτή. Τελικά $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ και $\lambda = -3$.

ΑΣΚΗΣΗ (4_7516)

Δίνεται η εξίσωση: $ax^2 - (a^2 - 1)x - a = 0$, με παράμετρο $a \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (a^2 + 1)^2$ Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $p_1 = a$ και $p_2 = -\frac{1}{a}$. Μονάδες 10

γ) Να βρεθούν οι τιμές του a , ώστε: $|p_1 - p_2| = 2$. Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$\Delta = \left[-(a^2 - 1) \right]^2 - 4 \cdot a \cdot (-a) = (a^2 - 1)^2 + 4a^2 = (a^2)^2 - 2a^2 + 1 + 4a^2 = (a^2 + 1)^2$$

β) Είναι $\Delta = (a^2 + 1)^2 > 0$ και αφού $a^2 + 1 \geq 1 > 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες:

$$\rho_{1,2} = \frac{-[-(a^2 - 1)] \pm \sqrt{(a^2 + 1)^2}}{2a} = \frac{a^2 - 1 \pm |a^2 + 1|}{2a} = \frac{a^2 - 1 \pm (a^2 + 1)}{2a}$$

άρα

$$\rho_1 = \frac{a^2 - 1 + a^2 + 1}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a \text{ και } \rho_2 = \frac{a^2 - 1 - a^2 - 1}{2a} = \frac{-2}{2a} = -\frac{1}{a}.$$

γ) **1^{ος} τρόπος:** Έχουμε

$$|p_1 - p_2| = 2 \Leftrightarrow \left| a - \left(-\frac{1}{a} \right) \right| = 2 \Leftrightarrow \left| a + \frac{1}{a} \right| = 2 \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} = 2 \text{ ή } a + \frac{1}{a} = -2 \Leftrightarrow$$

$$a^2 + 1 - 2a = 0 \text{ ή } a^2 + 1 + 2a = 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 = 0 \text{ ή } (a + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a - 1 = 0 \text{ ή } a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ή } a = -1.$$

$$\textbf{2^{ος} τρόπος:}$$
 Είναι $|p_1 - p_2| = 2 \stackrel{(\beta)}{\Leftrightarrow} \left| a + \frac{1}{a} \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{a^2 + 1}{a} \right| = 2 \Leftrightarrow \frac{|a^2 + 1|}{|a|} = 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2 + 1 = 2|a| \Leftrightarrow |a|^2 - 2|a| + 1 = 0 \Leftrightarrow (|a| - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow |a| = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1 \text{ (δεκτές)}$$

ΑΣΚΗΣΗ (4_7940)

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad 8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2)$$

Μονάδες 10

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4),$$

με $\alpha, \gamma \neq 0$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότεi) $\rho \neq 0$ και

Μονάδες 5

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

Για την εξίσωση (1) η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 196 - 96 = 100 > 0$$

και συνεπώς η (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{14 \pm 10}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{14+10}{6} = \frac{24}{6} = 4 \\ x_2 = \frac{14-10}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Για την εξίσωση (2) η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = 196 - 96 = 100 > 0$$

και συνεπώς η (2) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 8} = \frac{14 \pm 10}{16} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{14+10}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{14-10}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

β) i) Θα δείξουμε ότι $\rho \neq 0$

Μεθοδολογία για άτοπο: Συχνά όταν η ζητούμενη σχέση περιέχει άρνηση, λέξεις όπως δεν, μην, διάφορο κ.τ.λ εφαρμόζουμε απαγωγή σε άτοπο. Θεωρούμε ότι ισχύει η κατάφαση (όχι η άρνηση) της ζητούμενης σχέσης και καταλήγουμε σε κάτι που δεν ισχύει.

Έστω $\rho = 0$ τότε την αντικαθιστούμε στην εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ και έχουμε,

$$\alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0 \text{ \textbf{άτοπο},}$$

επειδή $\alpha\gamma \neq 0$. Επομένως $\rho \neq 0$

ii) Θα δείξουμε ότι το $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$,

$$\gamma \cdot \frac{1}{\rho^2} + \beta \cdot \frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \gamma + \beta\rho + \alpha\rho^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$$

που ισχύει, αφού ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3).

Σημείωση: Το ερώτημα (β) είναι η άσκηση B4 /σελ. 95 σχ. βιβλίου.

ΑΣΚΗΣΗ (4_13078)

Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1^{ου} βαθμού.

Μονάδες 5

β) Αν η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

Μονάδες 10

γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1$ είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι 1ου βαθμού αν, και μόνο αν, $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{και} \\ \beta \neq 0 \end{cases}$

άρα $\begin{cases} 8-\lambda = 0 \\ \text{και} \\ \lambda-2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 8 \\ \text{και} \\ \lambda \neq 2 \end{cases}$ οπότε για $\lambda = 8$ η εξίσωση (1) είναι πρώτου βαθμού.

β) Αν η (1) είναι 2^{ου} βαθμού, τότε $8-\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 8$

Η (1) έχει μία διπλή ρίζα όταν $\Delta=0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-2(\lambda-2)]^2 - 4 \cdot (8-\lambda) \cdot 1 \\ &= 4 \cdot (\lambda-2)^2 - 4 \cdot (8-\lambda) \\ &= 4 \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 32 + 4\lambda \\ &= 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 - 32 + 4\lambda \\ &= 4\lambda^2 - 12\lambda - 16 \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda - 16 = 0 \stackrel{+4}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad (2)$$

Η νέα διακρίνουσα της εξίσωσης (2) είναι:

$$\Delta' = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$$

Οπότε η (2) θα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta'}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \lambda_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Οι ρίζες είναι δεκτές αφού και οι δύο είναι διαφορετικές του 8.

Συνεπώς, η (1) έχει μία διπλή ρίζα όταν $\lambda = 4$ και όταν $\lambda = -1$.

- Για $\lambda = 4$ η (1) γίνεται:

$$(8-4)x^2 - 2(4-2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

και η διπλή της ρίζα είναι:

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

- Για $\lambda = -1$ η (1) γίνεται:

$$(8+1)x^2 - 2(-1-2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 0$$

και η διπλή της ρίζα είναι:

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{6}{2 \cdot 9} = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}$$

γ) Έχουμε,

- Για $\lambda = 4$ το τριώνυμο της (1) γίνεται:

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ αφού } a^2 \geq 0 \text{ για κάθε } a \in \mathbb{R}$$

- Για $\lambda = -1$ το τριώνυμο της (1) γίνεται:

$$9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ αφού } a^2 \geq 0 \text{ για κάθε } a \in \mathbb{R}$$

Άσκηση (4_13102)

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

(Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει κα άλλη τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

δ) Αν $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$ να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Αν $\lambda=5$ η εξίσωση (1) γίνεται :

$$x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 4 \cdot 5 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$$

Οπότε

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 = 0.$$

Άρα η εξίσωση $x^2 - 10x + 25 = 0$ έχει διπλή ρίζα.

β) Για την εξίσωση (1) η οποία έχει διπλή ρίζα, είναι αναγκαίο να ισχύει $\Delta = 0$, δηλαδή

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 16\lambda - 20 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

η νέα διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$$\Delta' = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 > 0$$

με ρίζες,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

Άρα για $\lambda=5$ και $\lambda=-1$ η αρχική εξίσωση έχει διπλή ρίζα

γ) Για την εξίσωση (1) η οποία έχει δύο ρίζες άνισες, είναι αναγκαίο να ισχύει :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 > 0 \Leftrightarrow \{\lambda < -1 \text{ ή } \lambda > 5\}$$

δ) Ισχύει ότι

$$|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5 \Leftrightarrow |\lambda^2 - 4\lambda - 5| = -(\lambda^2 - 4\lambda - 5)(2)$$

Για να ισχύει η σχέση (2) πρέπει :

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 - 4\lambda - 5 \leq 0 &\Leftrightarrow -1 \leq \lambda \leq 5 \\ \text{Όμως } \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow -1 < \lambda < 5$$

Όμως όταν $-1 < \lambda < 5$, τότε η διακρίνουσα της (1) είναι αρνητική, οπότε η (1) δεν έχει ρίζες.